

Optymalizacja portfelowa Markowitza z ograniczeniem kardynalności

Jakub Mikołajczak

Mikołaj Białoskórski

Kinga Głódź

4 czerwca 2026

Streszczenie

Raport dotyczy problemu optymalizacji portfelowej Markowitza z ograniczeniem kardynalności, w którym oprócz doboru wag portfela konieczny jest wybór ograniczonej liczby aktywów. Dodanie tego warunku powoduje utratę wypukłości zbioru dopuszczalnego i nadaje problemowi charakter kombinatoryczny. W pracy zastosowano trzy samodzielnie zaimplementowane metaheurystyki: symulowane wyżarzanie, algorytm genetyczny oraz algorytm roju cząstek. Dane wejściowe mają charakter syntetyczny i zostały wygenerowane z wykorzystaniem procesu GARCH(1,1), a funkcja celu jest oceniana jako średnia wariancja portfela po scenariuszach Monte Carlo. Wyniki porównano pod względem jakości funkcji celu, stabilności, czasu działania oraz dywersyfikacji uzyskanych portfeli.

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Cel projektu	3
3	Klasyczny model Markowitza	3
4	Problem z ograniczeniem kardynalności	4
5	Proces generujący dane GARCH	4
6	Wariant Monte Carlo funkcji celu	5
7	Reprezentacja rozwiązania i obsługa ograniczeń	6
8	Algorytmy i hiperparametry	6
8.1	Symulowane wyżarzanie	6
8.2	Algorytm genetyczny	6
8.3	Algorytm roju cząstek	7
9	Projekt eksperymentu	7
10	Metryki oceny	7
11	Wyniki Monte Carlo	8
12	Dywersyfikacja i skład portfela	13
13	Walidacja wyników	17
14	Uwagi krytyczne i ograniczenia badania	17
15	Wnioski końcowe	17

1 Wstęp

Optymalizacja portfelowa jest jednym z podstawowych zagadnień finansów ilościowych. Jej celem jest wyznaczenie takich udziałów aktywów w portfelu, aby uzyskać akceptowalny kompromis między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem. Punktem wyjścia jest klasyczny model Markowitza, w którym ryzyko jest mierzone wariancją portfela, a oczekiwany zwrot jest liniową funkcją wag.

Wariancja pełni rolę funkcji celu, ponieważ opisuje rozproszenie stóp zwrotu portfela wokół wartości oczekiwanej. Minimalizacja wariancji przy zadanym minimalnym zwrocie prowadzi do portfeli o możliwie niskim poziomie ryzyka. Bez dodatkowych ograniczeń problem ma postać wypukłego programu kwadratowego, ponieważ funkcja celu jest kwadratowa, a ograniczenia dotyczące sumy wag, nieujemności i minimalnego zwrotu są liniowe.

W praktycznych zastosowaniach często wymaga się jednak, aby portfel zawierał ograniczoną liczbę aktywów. Taki warunek zwiększa przejrzystość portfela, ogranicza koszty transakcyjne i ułatwia zarządzanie pozycjami. Formalnie oznacza to wprowadzenie ograniczenia kardynalności $\|w\|_0 \leq A$, gdzie A jest maksymalną liczbą aktywów o niezerowych wagach. Warunek ten wymusza dyskretną decyzję o wyborze podzbioru aktywów, przez co problem traci wypukłość i staje się kombinatoryczny. Z tego powodu uzasadnione jest zastosowanie metaheurystyk, które nie wymagają wypukłości zbioru dopuszczalnego.

2 Cel projektu

Celem projektu jest rozwiązanie problemu minimalizacji ryzyka portfela Markowitza z ograniczeniem kardynalności w warunkach syntetycznych danych generowanych stochastycznie. Ze względu na losowy charakter procesu generującego dane analizowany jest pakiet scenariuszy Monte Carlo. Dla każdego scenariusza wyznaczana jest macierz kowariancji oraz wektor oczekiwanych stóp zwrotu, natomiast funkcja celu jest definiowana jako średnia wariancja portfela po wszystkich scenariuszach.

Cele szczegółowe obejmują wygenerowanie syntetycznych szeregów czasowych dla wielu scenariuszy, oszacowanie parametrów portfela w każdym scenariuszu, porównanie trzech metaheurystyk, ocenę stabilności wyników między powtórzeniami, analizę czasu działania oraz zbadanie dywersyfikacji otrzymanych portfeli. Istotnym elementem jest również walidacja ograniczeń: sumy wag, braku krótkiej sprzedaży, ograniczenia kardynalności oraz minimalnej oczekiwanej stopy zwrotu.

3 Klasyczny model Markowitza

Niech $w = (w_1, \dots, w_N)^\top$ oznacza wektor wag portfela, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^\top$ wektor oczekiwanych stóp zwrotu, a $\Sigma = [\sigma_{ij}]$ macierz kowariancji stóp zwrotu. Oczekiwana stopa zwrotu portfela wynosi

$$\mu_p = \mu^\top w,$$

natomiast wariancja portfela jest dana wzorem

$$\sigma_p^2 = w^\top \Sigma w.$$

Funkcja celu jest kwadratowa, ponieważ

$$w^\top \Sigma w = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j.$$

Najwyższy stopień zmiennych decyzyjnych w_i wynosi dwa.

Klasyczny problem minimalizacji wariancji przy minimalnym zwrocie można zapisać jako

$$\min_w w^\top \Sigma w$$

przy ograniczeniach

$$\mu^\top w \geq r_0, \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad w_i \geq 0.$$

Jeżeli $\Sigma \succeq 0$, funkcja celu jest wypukła. W połączeniu z liniowymi ograniczeniami daje to wypukły problem programowania kwadratowego, który można rozwiązywać klasycznymi metodami optymalizacji wypukłej.

4 Problem z ograniczeniem kardynalności

W analizowanym zadaniu dodaje się warunek

$$\|w\|_0 \leq A,$$

gdzie $\|w\|_0$ oznacza liczbę niezerowych elementów wektora wag, a A jest maksymalną dopuszczalną liczbą aktywów w portfelu. Pełny problem ma postać

$$\min_w w^\top \Sigma w$$

przy ograniczeniach

$$\mu^\top w \geq r_0, \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad w_i \geq 0, \quad \|w\|_0 \leq A.$$

Utrata wypukłości jest widoczna już dla $A = 1$. Portfel inwestujący całość środków w pierwsze aktywo oraz portfel inwestujący całość środków w drugie aktywo spełniają ograniczenie kardynalności. Ich średnia, czyli portfel o wagach $(1/2, 1/2)$, zawiera jednak dwa aktywa i narusza warunek dla $A = 1$. Oznacza to, że zbiór dopuszczalny nie jest wypukły. Trzeba więc jednocześnie wybrać podzbiór aktywów oraz dobrać ich wagi, co nadaje problemowi charakter kombinatoryczny.

5 Proces generujący dane GARCH

Dane mają charakter syntetyczny i są generowane przy użyciu wspólnego czynnika rynkowego oraz składników losowych specyficznych dla aktywów. Dla scenariusza s , aktywa i i chwili t przyjęto model

$$r_{i,t}^{(s)} = \mu_i + b_i f_t^{(s)} + \varepsilon_{i,t}^{(s)}.$$

Wspólny czynnik rynkowy $f_t^{(s)}$ reprezentuje szok oddziałujący jednocześnie na wszystkie aktywa. Parametr b_i opisuje wrażliwość aktywa na ten czynnik. Składnik $\varepsilon_{i,t}^{(s)}$ opisuje losową część stopy zwrotu specyficzną dla danego aktywa.

Czynnik rynkowy jest generowany jako proces GARCH(1,1):

$$f_t^{(s)} = \sigma_{f,t}^{(s)} z_{f,t}^{(s)},$$

$$\left(\sigma_{f,t}^{(s)}\right)^2 = \omega_f + \alpha_f \left(f_{t-1}^{(s)}\right)^2 + \beta_f^{GARCH} \left(\sigma_{f,t-1}^{(s)}\right)^2.$$

Analogicznie, składnik losowy aktywa spełnia

$$\varepsilon_{i,t}^{(s)} = \sigma_{i,t}^{(s)} z_{i,t}^{(s)},$$

$$\left(\sigma_{i,t}^{(s)}\right)^2 = \omega_i + \alpha_i \left(\varepsilon_{i,t-1}^{(s)}\right)^2 + \beta_i^{GARCH} \left(\sigma_{i,t-1}^{(s)}\right)^2.$$

Wariancja warunkowa opisuje zmienność w chwili t zależną od poprzedniego szoku i poprzedniej wariancji. Parametr ω odpowiada za poziom bazowy wariancji, α za reakcję na ostatni szok, a β^{GARCH} za trwałość zmienności. Warunek $\alpha + \beta^{GARCH} < 1$ zapewnia stacjonarność kowariancyjną procesu. Przyjęta zmienność bezwarunkowa oznacza poziom zmienności implikowany przez parametry procesu:

$$Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta^{GARCH}}.$$

Innowacje są losowane z rozkładu t-Studenta i standaryzowane do wariancji równej jeden, co pozwala uwzględnić cięższe ogony niż w rozkładzie normalnym.

Tabela 1: Parametry procesu GARCH. Przyjęta zmienność bezwarunkowa oznacza poziom zmienności wynikający z parametrów procesu GARCH(1,1).

Klasa	Przyj. zm. bez.	ω	α	β^{GARCH}	L. akt.
Czynnik rynkowy	0.0065	8.450e-07	0.0700	0.9100	1
Agresywne	0.0153	5.912e-06	0.0750	0.9000	10
Konserwatywne	0.0052	6.711e-07	0.0750	0.9000	10
Zrównoważone	0.0091	2.079e-06	0.0750	0.9000	10

6 Wariant Monte Carlo funkcji celu

Scenariusz Monte Carlo oznacza jedną pełną realizację syntetycznego szeregu czasowego stóp zwrotu. Dla scenariusza s macierz danych oznaczono przez

$$R^{(s)} \in \mathbb{R}^{T \times N}.$$

Dla każdego scenariusza oblicza się wektor średnich stóp zwrotu

$$\mu^{(s)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t^{(s)}$$

oraz macierz kowariancji $\Sigma^{(s)} = Cov(R^{(s)})$.

Przy danych stochastycznych ocena portfela na podstawie jednej realizacji mogłaby być przypadkowa. Dlatego funkcja celu jest definiowana jako średnia wariancja portfela po scenariuszach:

$$f_{MC}(w) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S w^\top \Sigma^{(s)} w.$$

Warunek minimalnego oczekiwanego zwrotu ma postać

$$\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mu^{(s)\top} w \geq r_0.$$

W implementacji zastosowano funkcję kary za niedobór zwrotu:

$$F(w) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S w^\top \Sigma^{(s)} w + \lambda \max \{0, r_0 - \bar{\mu}^\top w\}^2,$$

gdzie $\bar{\mu} = S^{-1} \sum_{s=1}^S \mu^{(s)}$. Kara zwiększa wartość funkcji celu portfeli niespełniających warunku zwrotu.

7 Reprezentacja rozwiązania i obsługa ograniczeń

Kandydackim rozwiązaniem jest wektor wag w . Metaheurystyki mogą generować portfele z ujemnymi wagami, sumą wag różną od jedności, zbyt dużą liczbą niezerowych pozycji albo z niedostatecznym oczekiwanym zwrotem. Z tego powodu po wygenerowaniu kandydata stosowana jest procedura naprawy.

Procedura naprawy obcina ujemne wagi do zera, pozostawia najwyżej A największych wag, zeruje pozostałe elementy i normalizuje portfel do sumy jeden. Jest ona wspólna dla SA, GA i PSO. Różnice między algorytmami dotyczą sposobu generowania nowych kandydatów, a nie definicji ograniczeń ani sposobu oceny portfela.

8 Algorytmy i hiperparametry

Dla każdego algorytmu przyjęto jeden zestaw hiperparametrów. Algorytmy uruchamiano wielokrotnie, aby ocenić stabilność wyników wynikającą z losowej inicjalizacji i losowych decyzji podczas przeszukiwania. Hiperparametry nie są strojone w głównym eksperymencie.

8.1 Symulowane wyżarzanie

Symulowane wyżarzanie generuje lokalne zaburzenia aktualnego portfela. Lepsze rozwiązania są akceptowane bezwarunkowo, natomiast gorsze mogą zostać zaakceptowane z prawdopodobieństwem zależnym od temperatury. Temperatura maleje w kolejnych iteracjach.

8.2 Algorytm genetyczny

Algorytm genetyczny operuje na populacji portfeli. W każdej generacji stosowana jest selekcja, krzyżowanie, mutacja i elitaryzm. Po utworzeniu potomstwa stosowana jest wspólna procedura naprawy ograniczeń.

8.3 Algorytm roju cząstek

Algorytm roju cząstek aktualizuje pozycje portfeli na podstawie prędkości, najlepszego położenia własnego cząstki oraz najlepszego położenia całego roju. Po każdej aktualizacji pozycja jest naprawiana, aby spełniała ograniczenia portfelowe.

Tabela 2: Hiperparametry algorytmów wykorzystane w eksperymencie.

Algorytm	Hiperparametr	Wartość	Komentarz
SA	Liczba iteracji	450	liczba kroków lokalnego przeszukiwania
SA	Temperatura początkowa	1,00	wartość początkowa harmonogramu chłodzenia
SA	Współczynnik chłodzenia	0,992	mnożnik temperatury po iteracji
SA	Skala zaburzenia	0,12	odchylenie losowej zmiany wag
GA	Rozmiar populacji	42	liczba osobników w populacji
GA	Liczba generacji	60	liczba iteracji ewolucji populacji
GA	Prawdopodobieństwo mutacji	0,14	częstość losowych zmian potomstwa
PSO	Liczba cząstek	36	rozmiar roju
PSO	Liczba iteracji	60	liczba aktualizacji położenia cząstek
PSO	Bezwładność / poznawczy / społeczny	0,72 / 1,45 / 1,45	parametry równania ruchu cząstki

9 Projekt eksperymentu

Eksperyment składa się z następujących etapów: wygenerowania S scenariuszy danych, oszacowania $\mu^{(s)}$ i $\Sigma^{(s)}$ dla każdego scenariusza, wyboru wartości A , uruchomienia algorytmów SA, GA i PSO, oceny kandydackich portfeli przez średnią funkcję celu Monte Carlo, zastosowania procedury naprawy i walidacji oraz agregacji wyników.

Tabela 3: Parametry eksperymentu Monte Carlo.

Parametr	Wartość	Opis
Liczba scenariuszy	100	liczba niezależnych scenariuszy Monte Carlo
Długość szeregu	1000	liczba obserwacji w każdym scenariuszu
Liczba aktywów	30	rozmiar uniwersum inwestycyjnego
Limity kardynalności	2, 3, 5, 10, 15	dopuszczalne wartości parametru A
Powtórzenia algorytmów	5	liczba uruchomień dla każdej pary algorytm i A
Generator danych	czynniki rynkowe i GARCH(1,1)	wspólny czynnik oraz składniki specyficzne dla aktywów
Funkcja celu	średnia wariancja Monte Carlo	wariancja portfela uśredniona po scenariuszach z karą za niedobór zwrotu
Minimalny zwrot	1.029e-04	konserwatywny próg oczekiwanej stopy zwrotu portfela
Innowacje	t-Studenta, df=6	standaryzowane do wariancji równej jeden

10 Metryki oceny

Podstawową metryką jest funkcja celu Monte Carlo:

$$f_{MC}(w) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S w^\top \Sigma^{(s)} w.$$

Zmienność portfela jest pierwiastkiem z wariancji:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}.$$

Ma ona tę samą jednostkę co stopa zwrotu, dlatego jest łatwiejsza interpretacyjnie niż wariancja.

HHI jest współczynnikiem koncentracji portfela:

$$HHI = \sum_{i=1}^N w_i^2.$$

Wyższe HHI oznacza większą koncentrację, a HHI bliskie jedności oznacza portfel skoncentrowany w jednym aktywie. Efektywna liczba aktywów wynosi

$$N_{eff} = \frac{1}{HHI}.$$

Nie jest to zwykła liczba aktywów w portfelu, ponieważ uwzględnia równomierność wag. Portfel z wieloma aktywami, ale jedną dominującą wagą, może mieć niską efektywną liczbę aktywów. Stabilność oceniana jest przez odchylenie standardowe funkcji celu między powtórzeniami, a czas działania przez średni czas obliczeń dla algorytmu i wartości A .

11 Wyniki Monte Carlo

Tabela 4: Jakość rozwiązań: średnia, najlepsza i najgorsza wartość funkcji celu oraz odchylenie standardowe między powtórzeniami.

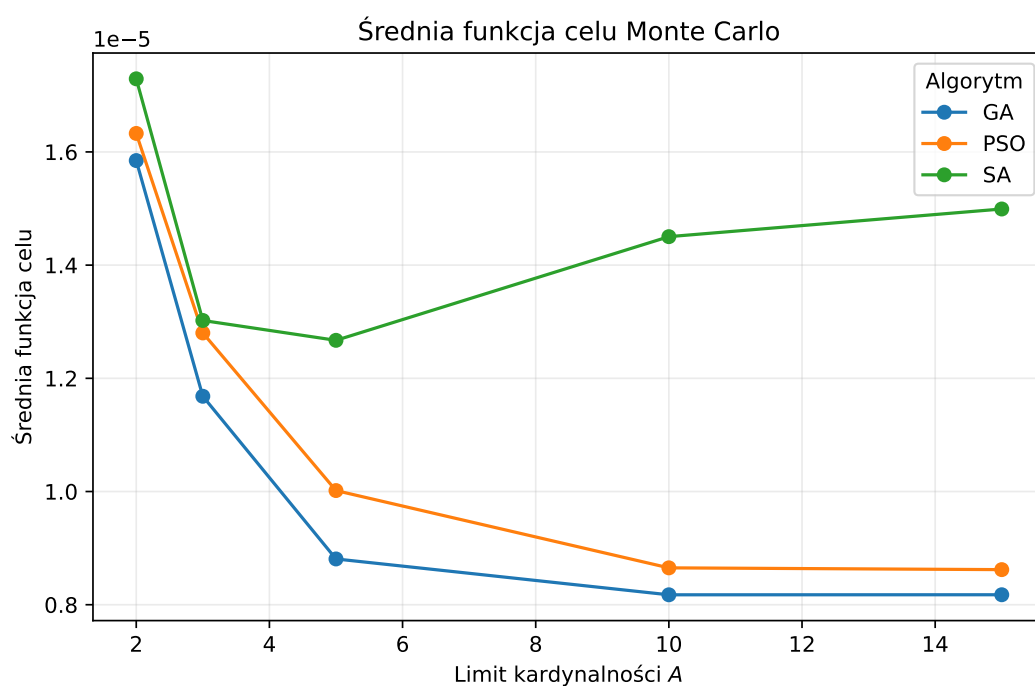
A	Alg.	Śr. cel	Najl. cel	Najg. cel	Odch. std.
2	GA	1.585e-05	1.528e-05	1.622e-05	5.153e-07
2	PSO	1.633e-05	1.528e-05	1.881e-05	1.560e-06
2	SA	1.729e-05	1.530e-05	1.833e-05	1.243e-06
3	GA	1.168e-05	1.154e-05	1.226e-05	3.224e-07
3	PSO	1.280e-05	1.154e-05	1.349e-05	7.390e-07
3	SA	1.302e-05	1.226e-05	1.466e-05	9.708e-07
5	GA	8.809e-06	8.809e-06	8.809e-06	2.090e-13
5	PSO	1.002e-05	9.276e-06	1.088e-05	7.391e-07
5	SA	1.267e-05	1.074e-05	1.375e-05	1.148e-06
10	GA	8.175e-06	8.145e-06	8.197e-06	2.044e-08
10	PSO	8.651e-06	8.234e-06	9.266e-06	5.095e-07
10	SA	1.450e-05	1.159e-05	1.630e-05	2.000e-06
15	GA	8.176e-06	8.152e-06	8.205e-06	1.931e-08
15	PSO	8.620e-06	8.158e-06	9.113e-06	3.746e-07
15	SA	1.499e-05	1.346e-05	1.587e-05	9.253e-07

Tabela 5: Zwrot, ryzyko i odsetek rozwiązań dopuszczalnych. Kolumna Dopuszcz. jest wyrażona w procentach.

A	Alg.	Śr. zwrot	Śr. zmienn.	Dopuszcz.
2	GA	1.252e-04	0.00398	100.0
2	PSO	1.268e-04	0.00404	100.0
2	SA	1.348e-04	0.00416	100.0
3	GA	1.247e-04	0.00342	100.0
3	PSO	1.375e-04	0.00358	100.0
3	SA	1.341e-04	0.00361	100.0
5	GA	1.366e-04	0.00297	100.0
5	PSO	1.402e-04	0.00316	100.0
5	SA	1.566e-04	0.00356	100.0
10	GA	1.447e-04	0.00286	100.0
10	PSO	1.459e-04	0.00294	100.0
10	SA	1.948e-04	0.00380	100.0
15	GA	1.457e-04	0.00286	100.0
15	PSO	1.427e-04	0.00294	100.0
15	SA	2.131e-04	0.00387	100.0

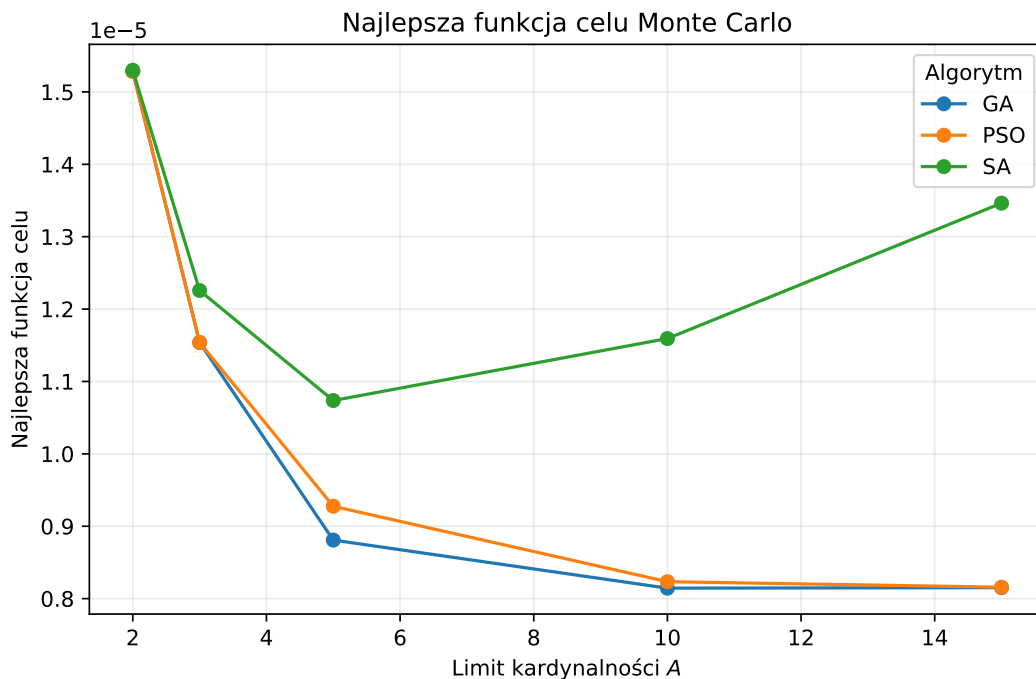
Tabela 6: Czas działania algorytmów.

A	Alg.	Śr. czas	Min. czas	Maks. czas
2	GA	0.392	0.266	0.464
2	PSO	0.128	0.086	0.214
2	SA	0.055	0.045	0.066
3	GA	0.452	0.387	0.578
3	PSO	0.152	0.078	0.319
3	SA	0.035	0.022	0.057
5	GA	0.584	0.490	0.670
5	PSO	0.152	0.138	0.181
5	SA	0.060	0.033	0.099
10	GA	0.428	0.394	0.447
10	PSO	0.112	0.060	0.144
10	SA	0.037	0.034	0.039
15	GA	0.283	0.224	0.386
15	PSO	0.076	0.052	0.107
15	SA	0.046	0.039	0.053



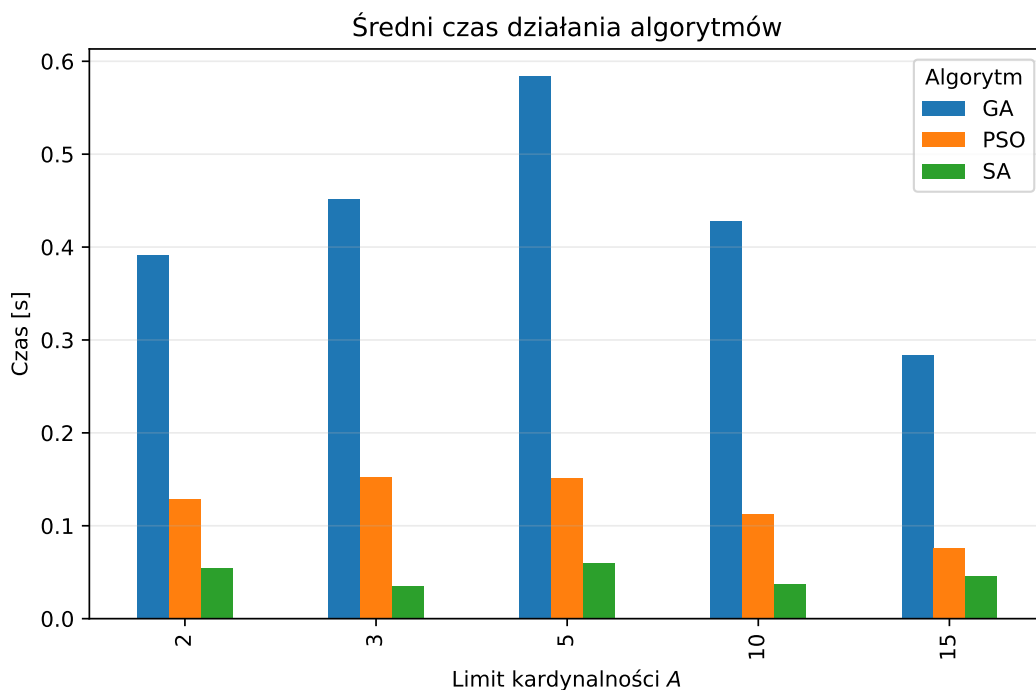
Rysunek 1: Średnia funkcja celu Monte Carlo według algorytmu i limitu kardynalności.

Wykres pokazuje przeciętną jakość rozwiązań po powtórzeniach algorytmów. Niższa wartość oznacza portfel o mniejszej średniej wariancji po scenariuszach Monte Carlo.



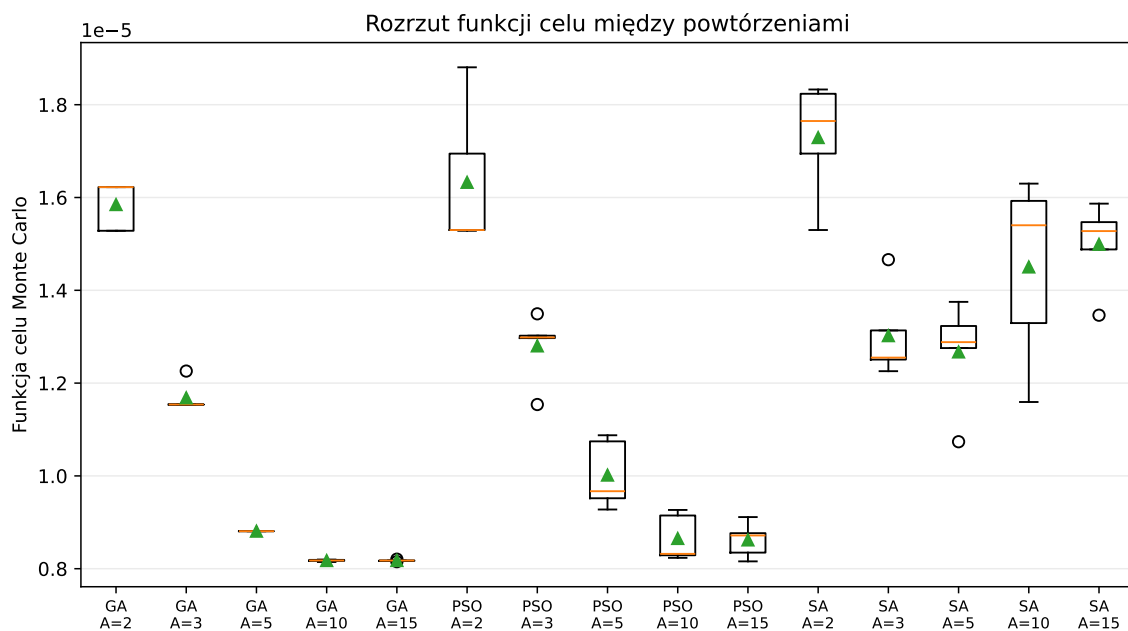
Rysunek 2: Najlepsza uzyskana funkcja celu Monte Carlo według algorytmu i limitu kardynalności.

Wykres pozwala porównać najlepsze pojedyncze rezultaty, niezależnie od stabilności algorytmu między powtórzeniami.



Rysunek 3: Średni czas działania algorytmów.

Porównanie czasu działania pokazuje koszt obliczeniowy uzyskania rozwiązań dla różnych wartości A .



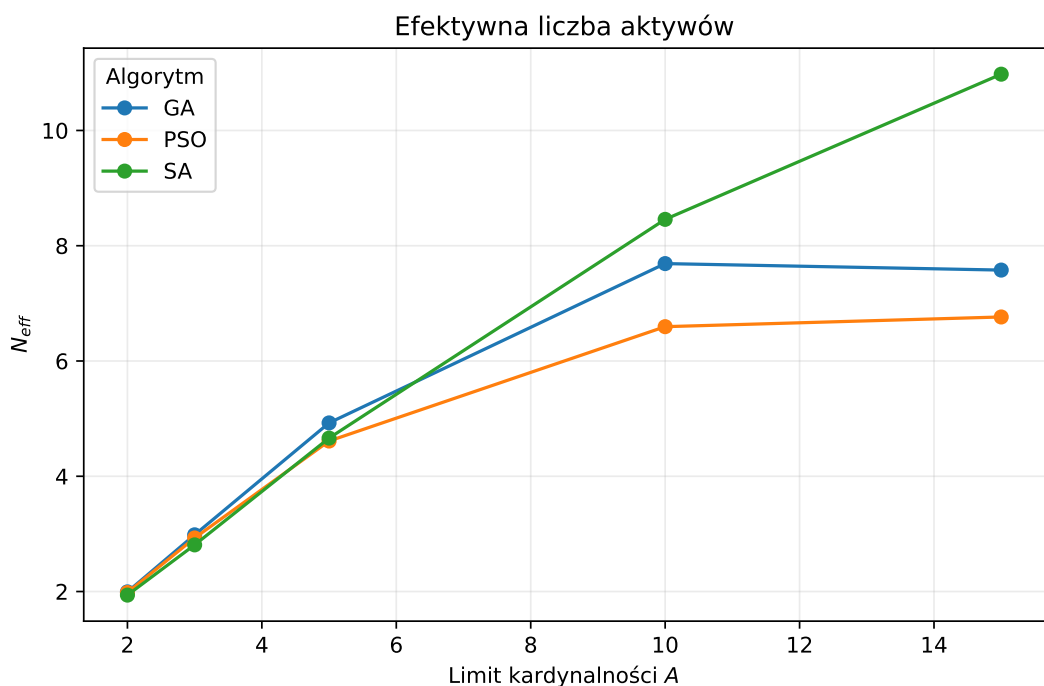
Rysunek 4: Rozrzut funkcji celu między powtórzeniami algorytmów.

Na wykresie pudełkowym linia wewnątrz pudełka oznacza medianę, granice pudełka odpowiadają kwartylom, a wąsy pokazują zakres wartości nieuznanych za odstające. Zielony trójkąt oznacza średnią wartość funkcji celu. Większy rozrzut wskazuje na mniejszą stabilność algorytmu między powtórzeniami.

12 Dywersyfikacja i skład portfela

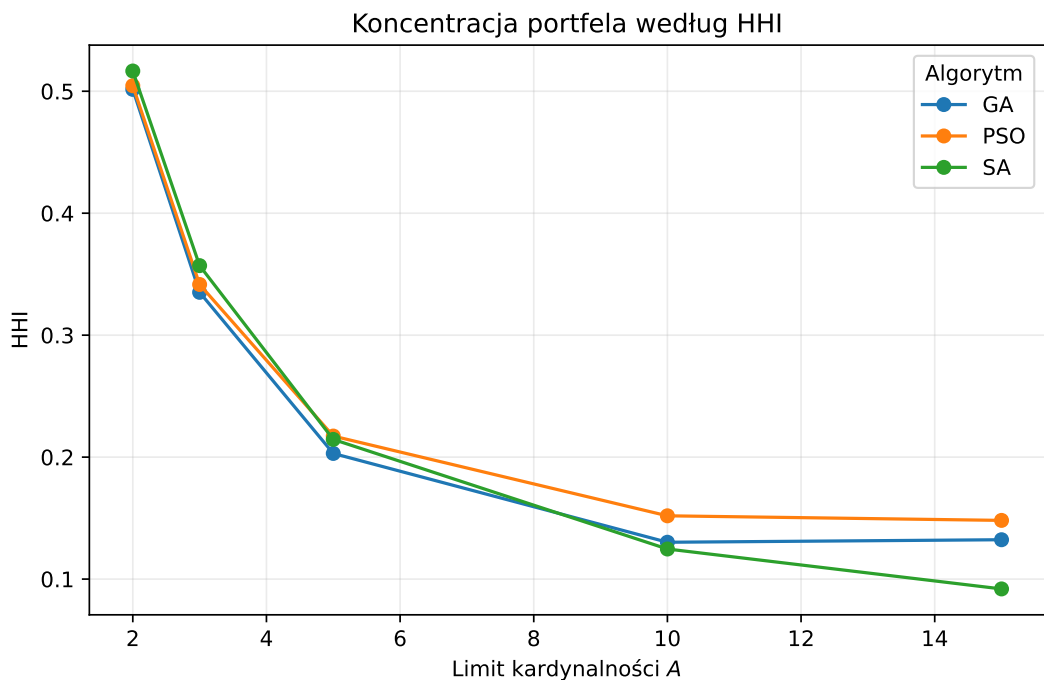
Tabela 7: Dywersyfikacja portfeli. Skróty oznaczają: Kons. – aktywa konserwatywne, Zrówn. – aktywa zrównoważone, Agres. – aktywa agresywne.

A	Alg.	N_{eff}	HHI	Maks. waga	Kons.	Zrówn.	Agres.
2	GA	1.994	0.502	0.519	1.000	0.000	0.000
2	PSO	1.982	0.505	0.545	1.000	0.000	0.000
2	SA	1.938	0.517	0.573	1.000	0.000	0.000
3	GA	2.984	0.335	0.365	1.000	0.000	0.000
3	PSO	2.929	0.342	0.390	1.000	0.000	0.000
3	SA	2.809	0.357	0.437	1.000	0.000	0.000
5	GA	4.926	0.203	0.237	1.000	0.000	0.000
5	PSO	4.611	0.217	0.263	0.986	0.014	0.000
5	SA	4.662	0.215	0.283	0.920	0.080	0.000
10	GA	7.690	0.130	0.179	0.968	0.032	0.000
10	PSO	6.596	0.152	0.203	0.976	0.024	0.000
10	SA	8.458	0.125	0.186	0.681	0.298	0.021
15	GA	7.578	0.132	0.185	0.953	0.047	0.000
15	PSO	6.764	0.148	0.200	0.969	0.031	0.000
15	SA	10.977	0.092	0.145	0.611	0.318	0.070



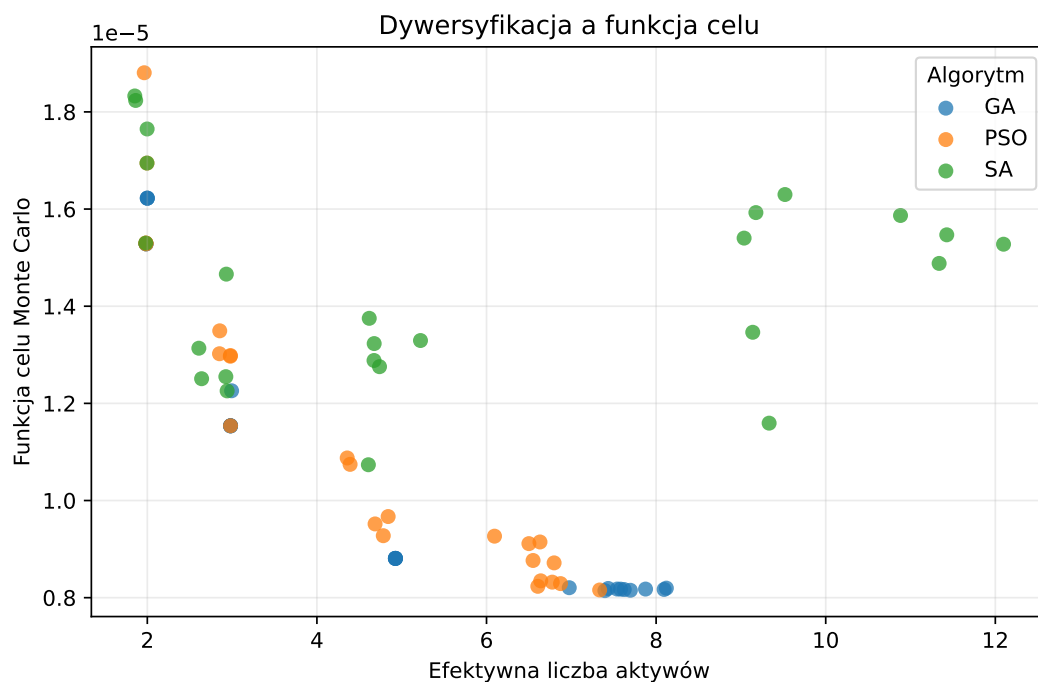
Rysunek 5: Efektywna liczba aktywów w portfelach.

Wykres pokazuje, czy wzrost limitu A przekłada się na rzeczywiście bardziej równomierny rozkład wag.



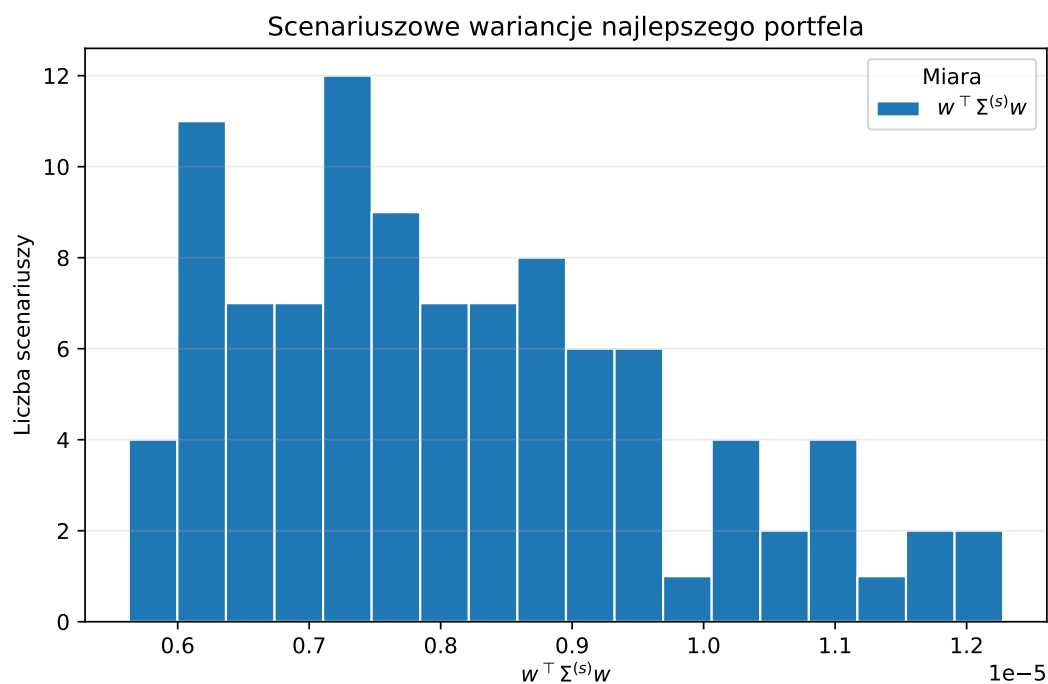
Rysunek 6: Koncentracja portfeli według HHI.

Niższe wartości HHI oznaczają mniejszą koncentrację portfela i większe rozproszenie wag między aktywami.



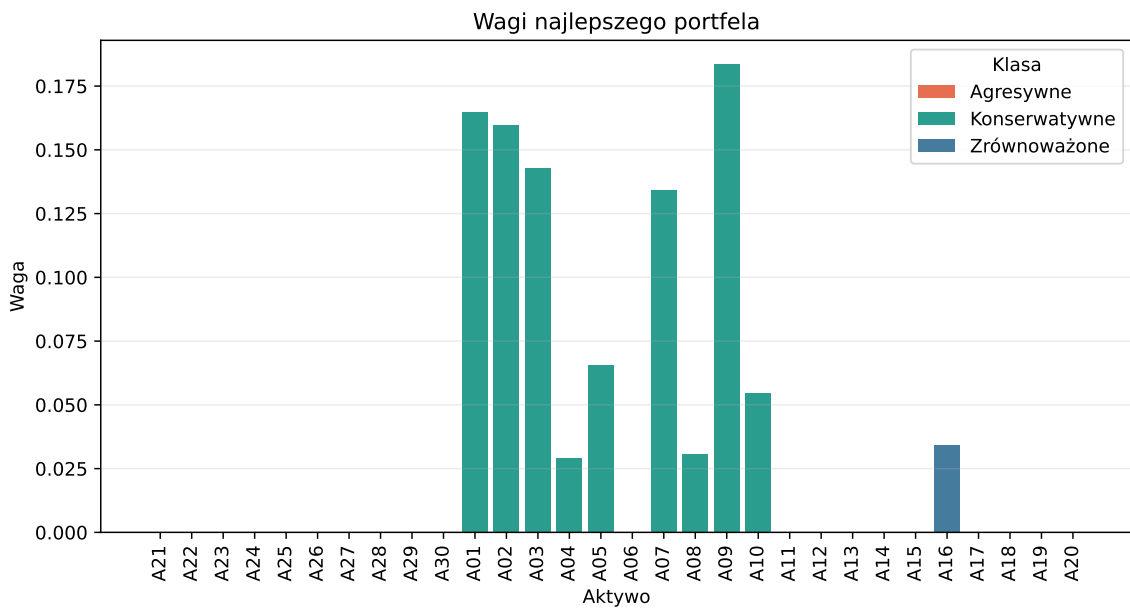
Rysunek 7: Relacja między dywersyfikacją a funkcją celu Monte Carlo.

Wykres pozwala ocenić, czy portfele o większej efektywnej liczbie aktywów uzyskują niższą wartość funkcji celu.



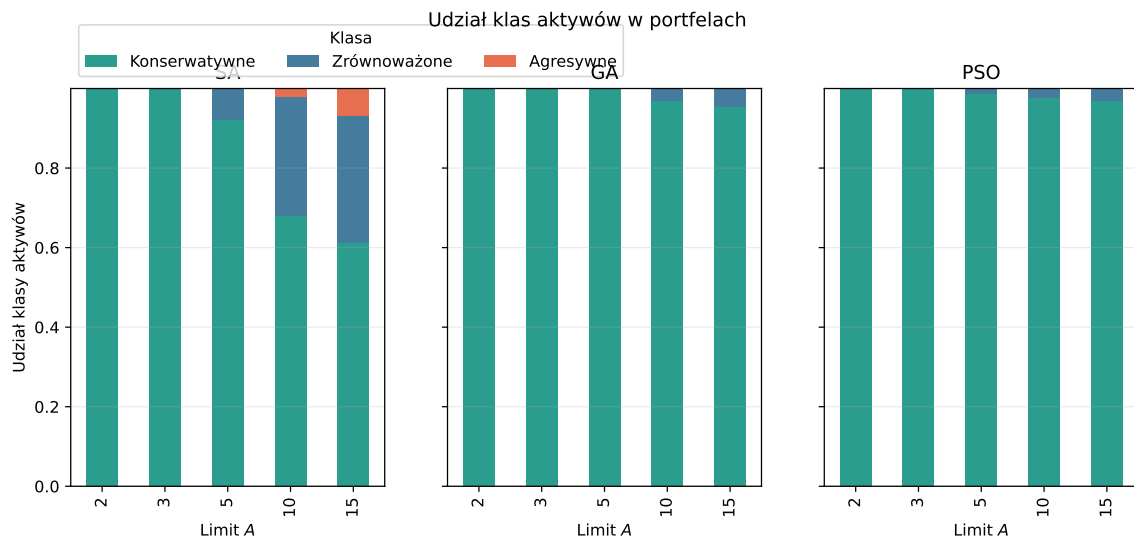
Rysunek 8: Rozkład wartości $w^T \Sigma^{(s)} w$ dla najlepszego portfela.

Histogram pokazuje, jak zmienia się wariancja najlepszego portfela między scenariuszami Monte Carlo. Rozkład ten ilustruje, że ocena portfela nie opiera się na pojedynczej macierzy kowariancji.



Rysunek 9: Struktura wag najlepszego portfela.

Wykres pokazuje, które aktywa tworzą najlepszy portfel oraz jak duża jest koncentracja wag w poszczególnych pozycjach.



Rysunek 10: Udział klas aktywów w portfelach.

Wykres wskazuje, czy minimalizacja średniej wariancji prowadzi przede wszystkim do wyboru aktywów konserwatywnych, czy też wymaga udziału klas o wyższej zmienności.

Tabela 8: Najlepszy portfel w eksperymencie.

Algorytm	A	Cel MC	Wariancja MC	Zwrot MC	Zmienn. roczna	N_{eff}	HHI	Maks. waga	Liczba aktywów	Dopuszcz.
GA	10	8.145e-06	8.145e-06	1.447e-04	0.0453	7.396	0.135	0.184	10	tak

13 Walidacja wyników

Dla każdego uzyskanego portfela sprawdzono sumę wag, nieujemność wag, ograniczenie kardynalności, minimalną średnią oczekiwaną stopę zwrotu, brak wartości NaN i nieskończonych, zgodność wymiarów oraz dodatnią półokreśloność macierzy kowariancji jako diagnostykę. Walidacja potwierdza, czy wynik może być interpretowany jako dopuszczalny portfel w analizowanym problemie.

14 Uwagi krytyczne i ograniczenia badania

Dane są syntetyczne, dlatego wyniki nie stanowią rekomendacji inwestycyjnej. Proces GARCH(1,1) jest użytecznym, ale uproszczonym modelem zmienności i nie obejmuje wszystkich własności rzeczywistych rynków finansowych. Wyniki zależą od parametrów procesu generującego dane, liczby scenariuszy Monte Carlo oraz długości szeregów czasowych.

Metaheurystyki nie gwarantują znalezienia optimum globalnego. Wyniki zależą od hiperparametrów, a w głównym eksperymencie użyto jednego zestawu ustawień dla każdego algorytmu. Symulowane wyżarzanie może wypadać słabiej nie dlatego, że jest metodą obiektywnie gorszą, lecz dlatego, że przy przyjętych parametrach może wymagać większej liczby iteracji, wolniejszego chłodzenia albo innej skali zaburzeń. Minimalizacja wariancji nie obejmuje także wszystkich aspektów ryzyka, takich jak skośność, grube ogony czy maksymalne obsunięcie kapitału. Procedura naprawy ograniczeń ma charakter heurystyczny.

15 Wnioski końcowe

W przeprowadzonym eksperymencie najniższą średnią wartość funkcji celu Monte Carlo uzyskał algorytm GA dla ograniczenia $A = 10$. Najlepszy pojedynczy rezultat również pochodził z konfiguracji GA przy $A = 10$. Oznacza to, że przy przyjętym zestawie hiperparametrów metody populacyjne i rojowe skutecznie przeszukiwały przestrzeń portfeli z ograniczeniem kardynalności.

Najkrótszy średni czas działania odnotowano dla algorytmu SA przy $A = 3$. Stabilność wyników, rozumiana jako przeciętnie najniższe odchylenie standardowe funkcji celu między powtórzeniami, była najwyższa dla algorytmu GA. Wartość $A = 10$ dawała przeciętnie najniższą funkcję celu, natomiast największa średnia efektywna liczba aktywów wystąpiła dla $A = 15$.

Wyniki należy interpretować w kontekście przyjętych hiperparametrów. Symulowane wyżarzanie może wymagać większej liczby iteracji, wolniejszego harmonogramu chłodzenia lub innej skali zaburzeń, aby skuteczniej eksplorować przestrzeń rozwiązań. Algorytmy GA i PSO mogą być szczególnie użyteczne jako szybkie metody heurystycznego przeszukiwania tego typu problemu, ale nie stanowi to gwarancji ich przewagi w każdej konfiguracji.

Literatura

- [1] H. Markowitz, Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 1952.
- [2] T. Bollerslev, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 1986.

- [3] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi, Optimization by Simulated Annealing, *Science*, 1983.
- [4] J. Kennedy, R. Eberhart, Particle Swarm Optimization, 1995.